Секция «Математика и механика»

Об одном аналоге формулы Эйлера для обобщенных тригонометрических функций связанные с решениями дифференциального уравнения дробного порядка

Торебек Б.Т.[1]***, Бориханов М.Б.***[2]

1 - Международный казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави, Факультет естествознания, 2 - Международный казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави, Естествознания, Туркестан, Казахстан

E-mail: turebekb85@mail.ru

Пусть $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. Рассмотрим функции

$$\cos_\alpha t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2\alpha k}}{\Gamma(2\alpha k + 1)}, \sin_\alpha t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{(2k+1)\alpha}}{\Gamma((2k+1)\alpha + 1)},$$

где - $\Gamma(z)$ гамма функция Эйлера. Так как при $\alpha = 1$ функции $\cos_\alpha t$ и $\sin_\alpha t$ совпадают с обычными тригонометрическими функциями $\cos t$ и $\sin t$, то следуя В.А.Нахушевой [1] их назовем обобщенным косинусом и обобщенным синусом соответственно. В работе [2] для функции

$$\cos_\delta t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\delta k}}{\Gamma(\delta k + 1)}, \sin_\delta t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\delta k+1}}{\Gamma(\delta k + 2)}, 1 < \delta < 2,$$

было установлено аналог формулы Эйлера

$$E_{\frac{\delta}{2},1}\left(it^{\frac{\delta}{2}}\right) = \cos_\delta t + iD^{1-\frac{\delta}{2}} \sin_\delta t,$$

где $E_{\delta,1}(x)$ - функция типа Миттаг-Леффлера [3], а D^δ - оператор дробного дифференцирование порядка δ в смысле Римана-Лиувилля [3]. Следуя эту работу получим следующее **Теорема 1.** *Для функции* $\cos_\alpha t$, $\sin_\alpha t$ *справедливы равенства*

$$\cos_\alpha t + i \sin_\alpha t = \exp_\alpha(it),$$

$$\cos_\alpha t - i \sin_\alpha t = \exp_\alpha(-it),$$

где

$$\exp_\alpha(it) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \exp_\alpha(-it) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (it^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

- обобщенные экспоненциальные функции (при $\alpha = 1$ *функция* $\exp_\alpha(it) = e^{it}$, *а,* $\exp_\alpha(-it) = e^{-it}$.*)* Теперь будем изучать дифференциальные свойства функции $\cos_\alpha t$, $\sin_\alpha t$. **Теорема 2.** *Функции* $\cos_\alpha t$, $\sin_\alpha t$ *являются частными решениями дифференциального уравнения дробного порядка*

$$D_*^\alpha D_*^\alpha [y](t) + y(t) = 0, t > 0, \tag{1}$$

где D_*^α - оператор дробного дифференцирование порядка α в смысле Капуто [3]. Известно, [3] что для оператора Капуто D_*^α вообще говоря справедливо $D_*^\alpha D_*^\beta \neq D_*^{\alpha+\beta}$. Поэтому дифференциальные уравнение (1) отличается от уравнений

$$D_*^{2\alpha}\left[y\right](t) + y\,(t) = 0, t > 0,$$

рассмотренный в работе [3]. Если считать $\alpha = 1$, то уравнение (1) совпадает с дифференциальным уравнением

$$y''\,(t) + y\,(t) = 0, t > 0.$$

Таким образом, мы получили обобщение формулы Эйлера

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, e^{-it} = \cos t - i \sin t$$

для решений уравнений (1), названный нами обобщенными тригонометрическими функциями.

Литература

1. Нахушева В. А. Математическое моделирование нелокальных физических процессов в средах с фрактальной структурой: Автореф.дис.доктора физ.-мат.наук. Таганрог, Россия. 2008. 30 с.

2. Гутов А. З. Аналог формулы Эйлера для обобщенного синуса и обобщенного косинуса. //Доклады АМАН. 2005. Т. 8. №1. С. 28–29.

3. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier. North-Holland. Mathematics studies. 2006. -539 p.

Слова благодарности

Авторы выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н. Турметову Б.Х. за полезные советы и внимания к работе