Секция «Математика и механика»

Геометрия многообразий Бертрана

Федосеев Денис Александрович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: docxaos@mail.ru

Многообразия Бертрана естественным образом возникают в механике как конфигурационные многообразия следующей обратной задачи динамики [1]: найти центральный потенциал, в поле которого траектории движения точки по поверхности вращения $(a,b)\times S^1$ с метрикой $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$ в полярных координатах $(r, \varphi \mod 2\pi)$ определенного класса являются замкнутыми.

В работе [2] было показано, что все многообразия Бертрана без экваторов (т.е. таких, что $f'(r) \neq 0$ на (a,b)) могут быть описаны следующим образом:

Теорема 1 *Многообразие $(a,b)\times S^1$ с метрикой $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$ в полярных координатах $(r, \varphi \mod 2\pi)$, где $f'(r) \neq 0$ на (a,b) является многообразием Бертрана (для классов замыкающих, локально-замыкающих, полулокально-замыкающих, сильно и слабо замыкающих потенциалов) если и только если существует тройка параметров (μ, c, t), $\mu \in \mathbb{Q}_{>0}, c \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$ и координаты $(\theta = \theta(r), \varphi \mod 2\pi)$, где $\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{\mu^2}\frac{1}{f^2(r)}$, что метрика принимает вид $ds^2 = (\theta^2 + c - t\theta^{-2})^2 d\theta^2 + \mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})d\varphi^2$.*

Многообразие Бертрана состоит из $k_{c,t} \in \{1, 2\}$ связных компонент. Компонента, соответствующая $k = 1$, называется основной, а соответствующая $k = 2$ — дополнительной. Дополнительное многообразие существует только при $t < 0$.

Многообразия Бертрана образуют трехпараметрическое семейство. Некоторые многообразия Бертрана могут быть реализованы, как поверхности вращения, вложенные в $\mathbb{R}^3$. А именно, справедлива следующая теорема:

Теорема 2 *Верны следующие утверждения о реализуемости римановых многообразий Бертрана $(I_{k,c,t}\times S^1, \mathrm{ds}^2_{\mu,c,t})$ целиком:*
1) *Дополнительное многообразие не реализуемо никогда;*
2) *Основное многообразие реализуемо тогда и только тогда, когда соответствующая тройка параметров (μ, c, t) принадлежит следующим областям: $\{\mu \geq 2, c \geq -2\sqrt{-t}, t \leq 0\} \cup \{1 \leq \mu < 2, c \geq -2\sqrt{-t}\sqrt{h(\mu)}, t \leq 0\}$, где $h \in \mathrm{Homeo}^+((0, +\infty), \mathbb{R})$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм интервалов, определенный формулой $h(\mu) := \frac{(\mu^2-1)(8+\mu^2)^2}{27\mu^4}$.*

Если многообразие не может быть реализовано целиком, возникает задача локальной реализуемости многообразия Бертрана. Эта задача также полностью решена для многообразий Бертрана без экваторов.

Кроме того, в докладе будут изложены некоторые результаты, касающиеся многообразий Бертрана с экваторами.

Литература

1. Bertran J., C. R. Acad. Sci. Paris, 1873, V.77.

2. О.А. Загрядский, Е.А. Кудрявцева, Д.А. Федосеев, Обобщение теоремы Бертрана на поверхности вращения. // Матем. Сб. 203:8 (2012), с.39-78.

Слова благодарности

Авторы благодарны А.Т.Фоменко за постановку задачи, А.В.Борисову, Е.А.Кудрявцевой, И.Х.Сабитову за полезные замечания и обсуждения.
Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для господдержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых, в ФГБОУ ВПО "Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова" по договору №11.G34.31.0054
гранта РФФИ 13-01-00664а и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ России, проект НШ 1410.2012.1